Grundlegende Rechenoperationen 2

Dieses Kapitel dient zur kurzen Zusammenfassung von Rechenregeln und Notationen, die bereits aus der Schule bekannt sein sollten. Des Weiteren werden wir mit mathematischen Schreibweisen vertraut gemacht, die vielleicht noch nicht allen vollständig bekannt sind.

2.1 Welche Zahlen sind aus der Schule bekannt?

In der Schule haben alle die nachfolgenden Zahlen kennengelernt:

1. Die natürlichen Zahlen $= \{1, 2, 3, \ldots\}$, die wir mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnen werden. Es gibt in der Mathematik einen „Gelehrtenstreit", ob die Zahl Null eine natürliche Zahl ist oder ob sie es nicht ist. Wir wollen hier nichts zu diesem Thema beitragen, werden aber zwischen den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und den natürlichen Zahlen einschließlich der Null unterscheiden, die wir mit dem Symbol $\mathbb{N}_0$ notieren.
2. Die Menge der ganzen Zahlen $= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$, die wir mit dem Symbol $\mathbb{Z}$ darstellen.
3. Die Menge der rationalen Zahlen, d. h. die Menge aller als Bruch darstellbaren Zahlen, die wir mit $\mathbb{Q}$ darstellen.
4. Die Menge der reellen Zahlen, also die Menge, die neben den Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen, auch jene Zahlen enthält, für die dies nicht möglich ist, wie z. B. die Kreiszahl π oder $\sqrt{2}$. Für sie werden wir das Symbol $\mathbb{R}$ verwenden.

Exkurs 2.1

Wenn man bedenkt, wie wichtig in der heutigen digitalen Welt die Null ist, so kann man sich schon darüber wundern, dass die Menschen zunächst durchaus ohne sie ausgekommen sind. Wenn man sich nämlich auf das reine Zählen beschränkt oder lediglich die Addition und die Subtraktion zulässt, so kommt man zunächst auch ohne die Null recht weit. Man denke nur an die in Gast-

D. Horstmann, *Mathematik für Biologen*, DOI 10.1007/978-3-662-48501-9_2

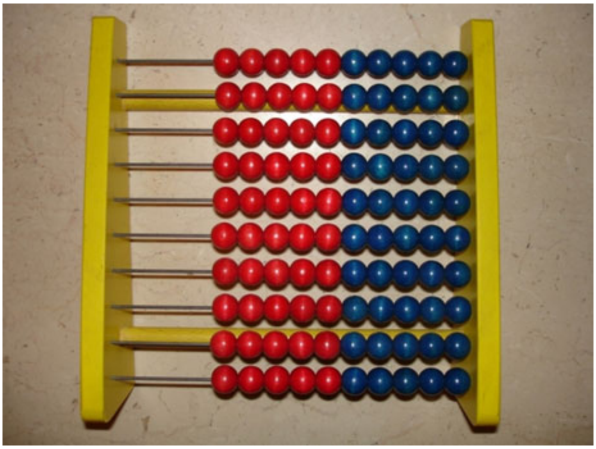


Abb. 2.1 Ein Abakus. Bild: *Dirk Horstmann*

stätten übliche Abrechnungsmethode mit „Deckeln“, bei denen die Getränke anhand von Strichlisten und „Fünferblöcken“ gezählt werden, oder das Rechnen mit einfachen „Rechenmaschinen“ wie zum Beispiel einem Abakus (siehe Abb. 2.1). Auch die Römer kamen mit ihren Zahlensystem ganz ohne die Null aus. Wann der Mensch begonnen hat, Dinge in seiner Umwelt zu zählen und sich mit Rechenoperationen zu befassen, ist noch immer nicht abschließend geklärt. Die „Strichliste“ als Zählmethode ist jedoch bereits sehr alt. Archäologische Funde, die als die frühesten Belege für das menschliche Rechnen angesehen werden, sind Knochen, die als Kerbstöcke dienten. Mithilfe von Kerbhölzern wurden z. B. früher auch Schulden „notiert“ (ohne hierbei auf die Menge der ganzen Zahlen zurückgreifen zu müssen), und in Kneipen werden die getrunkenen bzw. bestellten Getränke oft mit Strichen auf Bierdeckeln festgehalten. (Auch im „Wilden Westen“ wurde diese Methode von Revolverhelden angewendet, die – wenn man manchem Hollywood-Western Glauben schenken darf – ihre erfolgreichen Revolverduelle mit einer Kerbe in ihrem Revolvergriff festhielten bzw. zählten.) Der älteste bekannte (Zähl-)Kerbstock ist ein im südlichen Afrika gefundenes Wadenbein eines Affens. Das allgemeine „Schreiben“ und die schriftliche Verwendung von Zahlen stammen aus dem Gebiet zwischen Euphrat und Tigris, das heute geografisch betrachtet in Südost-Anatolien (Türkei), in Syrien und im Irak liegt. Wie eingangs bereits erwähnt, ist das „Konzept“ der Null ein fundamentaler Bestandteil unseres heutigen Umgangs mit Zahlen und Zahlsystemen. Viele mathematische Theorien fordern sogar die Existenz einer Null, um andere Begriffe und Sachverhalte axiomatisch sinnvoll einführen und erklären zu können. Das Zahlensymbol 0 ist heute für uns genauso selbstverständlich wie alle übrigen neun Ziffern auch, und wir gehen mit ihm genauso unbedarft um. Allerdings war dies nicht immer so, und es dauerte seine Zeit, bis die Null beim Rechnen mit Zahlen ihren heutigen Platz fand. Es dauerte immerhin bis ins Jahr 130 n. Chr., als Ptolemäus das auf der 60 basierende sumerische Zahlensystem erweiterte und dieses um den Buchstaben „Omikron“ als eine Null ergänzte.

Die uns bekannte Null, so wie wir sie in unserem Alltag verwenden, hat ihren Ursprung in Indien. Die Gründe für ihre „Einführung“ erinnern ein wenig an eine ihrer heutzutage wichtigsten Rollen im Zusammenhang mit Computern und dem Binärcode von Programmen. Die indischen Mathematiker standen im 7. Jahrhundert nämlich vor dem konkreten Problem, ein Verwechseln von Zahlen, bei denen Ziffern häufiger als einmal vorkamen, verhindern zu wollen. Sie wollten also ausschließen, dass man zum Beispiel die Zahl 44 mit der Zahl 404 oder der Zahl 440 verwechselt. (Ein Problem vor dem die Römer mit ihrem Zahlensystem nicht standen, da dort die 44 als XLIV geschrieben wird, 404 dem Ausdruck CDIV entspricht und die Zahl 440 durch CDXL gegeben ist.) Zur Lösung dieses (in ihrem Zahlensystem) gegebenen Problems behalfen sie sich mit einem Wort, das das Fehlen einer Ziffer anzeigte. Die Darstellung dieses Wortes erfolgte durch einen Punkt, aus dem sich dann nach und nach ein einheitliches Symbol für die uns bekannte Null entstand. Auch das Rechnen mit dieser neuen Zahl wurde von den Indern behandelt. So untersuchte der Hindu-Mathematiker Brahmagupta um 676 n. Chr. die Rechenoperationen, an denen die Null beteiligt sein kann. Auch für uns stellt die Division durch null heute noch eine besondere Schwierigkeit dar. Brahmagupta behauptete (wie wir heute jedoch wissen irrtümlicherweise), dass null geteilt durch null wieder null ergibt (für einen korrekten Antwortansatz auf diese Frage siehe hierzu auch Abschn. 9.2) und ließ Brüche, in denen null im Zähler oder Nenner vorkamen, stehen, ohne eine Antwort auf diese Rechenaufgaben zu geben. Es dauerte einige Zeit, bis schließlich ca. 200 Jahre später sich der jainistische Mathematiker Mahavira an diese Frage herantraute und behauptete, dass eine Zahl unverändert bliebe, wenn man sie durch null teilt. Wie wir heute wissen, lag er mit dieser Behauptung ebenso falsch wie Brahmagupta mit seiner Behauptung über den Wert des Bruchs $0/0$. Mahavira stellte jedoch korrekterweise fest, dass die Quadratwurzel aus null ebenfalls wieder die Null ist. Dem im 12. Jahrhundert lebenden indische Mathematiker Bhaskara wird ein Zitat zugeschrieben, dem der Wert entnommen werden kann, den man bei der Division einer beliebigen Zahl durch null erhält. Demnach soll Bhaskara über das Ergebnis einer derartigen Division gesagt haben, dass es lediglich mit der „unendlichen Größe“ des Gottes Vishnu verglichen werden könne. (Siehe hierzu auch [17, Seite 10, „Die Ursprünge des Rechnens“, und Seite 34, „Die Null“].)

Es scheint also, als habe der deutsche Mathematiker Leopold Kronecker (7.12.1823–29.12.1891) mit seinem Ausspruch durchaus recht (vgl. [15, Seite 72]):

> Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles Übrige ist Menschenwerk.

Offensichtlich lassen sich die eingeführten Zahlenmengen mithilfe von sogenannten *Teilmengenrelationen* in einen Zusammenhang bringen. Wenn eine Menge eine Teilmenge einer anderen Menge ist, so wird dies mit dem Zeichen $\subset$ symbolisiert. Dafür, dass die Menge der natürlichen Zahlen in der Menge der ganzen Zahlen enthalten ist, also eine Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen darstellt, schreiben wir somit kurz

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Hierbei schließt das verwendete Teilmengenzeichen nicht ausdrücklich aus, dass die Mengen die gleichen sein dürfen, d. h., es gilt auch

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}.$$

Offensichtlich gilt für die hier angegebenen Zahlen das Nachfolgende:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Viele werden über das Wort „offensichtlich" in dem vorangegangenen Satz stolpern. Das Wort „offensichtlich" benutzt der Mathematiker gerne, wenn die von ihm getroffene Aussage leicht zu beweisen ist und er den Beweis aus irgendwelchen Gründen nicht geben will. Hier wollen wir aber kurz auf diesen „offensichtlichen Sachverhalt" eingehen und ihn erklären.

Wie wir gesehen haben, ist die Menge der ganzen Zahlen größer als die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null. Wenn wir also aus der Menge der ganzen Zahlen die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null herausnehmen würden, blieben die negativen Zahlen übrig. Mithilfe mathematischer Symbole geschrieben entspräche dies:

$$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset,$$

wobei $\emptyset$ die sogenannte leere Menge darstellt, die Menge also, die kein Element enthält. Auch die Behauptung

$$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \neq \emptyset$$

ist leicht einzusehen, da es ja z. B. den Wert 0,75, also die rationale Zahl $3/4$ gibt, die keine ganze Zahl ist. Die Behauptung jedoch, dass die reellen Zahlen größer sind als die Menge der rationalen Zahlen, ist nicht für jeden so leicht einsichtig.

2.1.1 Das Prinzip eines Widerspruchsbeweises

Wir behaupten also, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$ ist, d. h., dass es reelle Zahlen gibt, die sich nicht als Bruch schreiben lassen. Wir formulieren eine konkrete Behauptung hierzu.

Behauptung 2.1 *Die Wurzel aus 2 ist ein Element der reellen Zahlen, aber die Wurzel aus 2 ist kein Element der rationalen Zahlen. In Formelschreibweise:* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ *aber* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

In der Mathematik unterscheidet man zwischen einem sogenannten *direkten Beweis* und einem sogenannten *indirekten Beweis* bzw. einem Widerspruchsbeweis.

Bevor wir nun Behauptung 2.1 mittels eines Widerspruchbeweises zeigen werden, gehen wir zunächst auf die Grundprinzipien dieser beiden Beweismethoden ein, indem wir zwei Hilfsaussagen zeigen werden. Hierbei zeigen wir zunächst eine Behauptung mittels eines direkten Beweises und anschließend eine Aussage, bei der wir einen indirekten Beweis führen werden. Schauen wir uns also zunächst die nachfolgende Behauptung an:

Behauptung 2.2 *Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl n ist stets ungerade. (Somit gilt auch, dass das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl wieder eine gerade Zahl ist.)*

Es sei also n eine ungerade natürliche Zahl. Dann ist n darstellbar als Summe einer geraden Zahl und der 1, d. h.:

$$n = 2k + 1,$$

wobei k eine natürliche Zahl oder Null ist. Hieraus folgt jedoch, dass

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Somit ist also auch n^2 eine ungerade Zahl.

Feststellung 2.1
Da wir hier aus einer wahren Aussage durch eine mathematisch in sich schlüssige und fehlerfreie Argumentation die Behauptung folgern konnten, die Behauptung also direkt aus einer Folge von wahren Aussagen geschlossen wurde, nennt man eine derartige Beweisführung einen direkten Beweis.

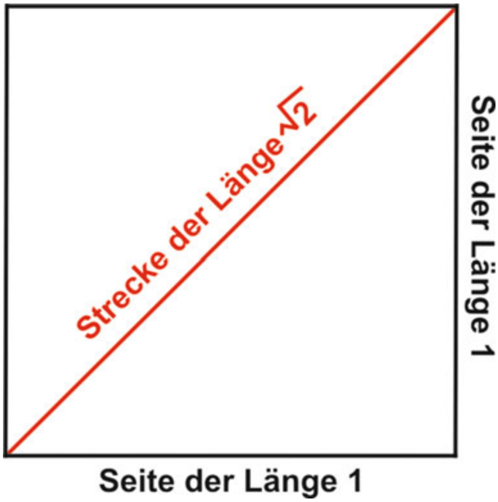
Betrachten wir nun die nachfolgende Aussage:

Behauptung 2.3 *Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.*

Es sei also vorausgesetzt, dass n eine gerade natürliche Zahl ist. Wir nehmen nun einmal das Gegenteil zu der gemachten Aussage an. Wir gehen somit davon aus, dass die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl eine ungerade natürliche Zahl ist. Sei also

$$k = \sqrt{n} \quad \text{ungerade.}$$

Abb. 2.2 Darstellung einer Strecke mit der Länge $\sqrt{2}$



Nach der eben mittels eines direkten Beweises gezeigten Aussage aus Behauptung 2.2 ist dann die Zahl $k^2 = n$ auch ungerade. Dies ist jedoch ein Widerspruch unserer Voraussetzung, dass n gerade ist. Daher muss also die von uns gemachte Annahme, dass k eine ungerade Zahl ist, falsch gewesen sein und somit $\sqrt{n}$ eine gerade Zahl sein.

Feststellung 2.2
Wenn also eine gemachte Behauptung mit mathematisch in sich schlüssigen und fehlerfreien Schlussfolgerungen auf einen Widerspruch zu einer zweifelsfrei wahren Aussage führt, dann kann die gemachte Behauptung nicht korrekt gewesen sein und die zu der Behauptung gegenteilige Aussage muss gelten. Dies wird als indirekter Beweis bzw. Widerspruchsbeweis bezeichnet.

Die Behauptung 2.1 lässt sich mithilfe eines eben solchen *Widerspruchsbeweises* belegen. Hierfür nehmen wir an, dass die zur Behauptung gegenteilige Aussage richtig ist. Wir nehmen also in diesem Fall an, dass die Wurzel aus 2 eine rationale Zahl ist und sich somit als ein Bruch darstellen lässt. D. h., dass es eine ganze Zahl p und eine ganze Zahl q gibt, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

1. $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}$ sind teilerfremd, d. h. es gibt keine derartigen ganzen Zahlen r, n und m, so dass $p = n \cdot r$ und $q = m \cdot r$ mit $r \neq \pm 1$ gilt.
2. Die Wurzel aus 2 ist gleich dem Quotienten aus diesen beiden Zahlen p und q, d. h.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

wobei der Bruch auf der rechten Seite dieser Gleichung aufgrund der ersten Eigenschaft von p und q so weit wie möglich gekürzt ist.

Anmerkung 2.1 Dass die Zahl $\sqrt{2}$ tatsächlich auch existiert (schließlich kann man ihren „Wert" in der realen Welt ja auch sehen, wie die Skizze in Abb. 2.2 veranschaulicht), zeigen wir mithilfe des aus der Schule bekannten „Satz des Pythagoras". Für die Länge x der Diagonalen eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 gilt nach diesem Satz:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Wir können für die Länge x also das „Symbol" $\sqrt{2}$ verwenden.

Wenn wir die Wurzel aus 2 quadrieren (also beide Seiten mit sich selbst noch einmal multiplizieren), so ergibt sich die Gleichung

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

woraus

$$2 \cdot q^2 = p^2$$

folgt, d. h., p^2 ist eine gerade Zahl. Somit ist aber auch p bereits schon eine gerade Zahl, da das Quadrat einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl ist (wie wir ja in Behauptung 2.3 gesehen haben), und wir können p mithilfe einer anderen ganzen Zahl p' als $2 \cdot p'$ schreiben, d. h.

$$p = 2 \cdot p'.$$

Somit gilt also, dass

$$2 = \frac{4 \cdot (p')^2}{q^2}$$

ist, woraus nach Multiplikation mit q^2 die Gleichung

$$q^2 = 2 \cdot (p')^2$$

folgt. Somit ist auch q eine gerade Zahl. Dies ist aber nicht möglich, da wir angenommen hatten, dass p und q teilerfremd sind. Zwei gerade Zahlen sind jedoch nie teilerfremd, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind. Also kann unsere Annahme, dass die Wurzel aus 2 eine rationale Zahl ist, nicht richtig gewesen sein und somit muss $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gelten.

Feststellung 2.3
Die Wurzel aus 2 gehört nicht zu der Menge der rationalen Zahlen.

2.1.2 Weitere Bezeichnungen und Notationen

Um Größenverhältnisse von Zahlen darzustellen, verwendet man die folgenden Zeichen:

1. Das Symbol „$\geq$“ bedeutet „größer als oder gleich groß wie“.
2. Das Symbol „$>$“ bedeutet „echt größer als“.
3. Das Symbol „$\leq$“ bedeutet „kleiner als oder gleich groß wie“.
4. Das Symbol „$<$“ bedeutet „echt kleiner als“.

D. h., $a < b$ schreibt man, wenn die Zahl a echt kleiner als die Zahl b ist, wobei $a \geq b$ geschrieben wird, wenn die Zahl a größer oder genauso groß sein kann wie die Zahl b.

Die Menge aller Zahlen, die echt größer als die Zahl a sind, aber die gleichzeitig auch echt kleiner als eine Zahl b sind, wird mit

$$(a, b) \quad \text{oder mit } \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

angegeben. Hierbei ist $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ wie folgt zu lesen. Es ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt, dass sie echt größer a und echt kleiner b sind. Des Weiteren hat man

1. die Menge aller reellen Zahlen x, die echt größer als die Zahl a, aber kleiner oder gleich der Zahl b sind, d. h.

$$(a, b] \quad \text{oder mit } \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

2. die Menge aller reellen Zahlen x, die größer oder genauso groß sind wie die Zahl a, aber echt kleiner sind als die Zahl b, d. h.

$$[a, b) \quad \text{oder mit } \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

3. die Menge aller reellen Zahlen x, die größer als oder genauso groß wie die Zahl a sind, die aber gleichzeitig kleiner als oder gleich der Zahl b sind, d. h.

$$[a, b] \quad \text{oder mit } \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Man bezeichnet diese Mengen auch als Intervalle, wobei (a, b) das offene Intervall zwischen a und b bezeichnet; $[a, b)$ das rechts halboffene und $(a, b]$ das links halboffene Intervall zwischen a und b beschreibt; und $[a, b]$ als das abgeschlossene Intervall von a bis b bezeichnet wird. Die Zahl

$$m = \frac{a + b}{2} \quad \text{ist die „Intervall-Mitte“}$$

und

$$d = b - a \quad \text{ist die „Intervall-Länge“,}$$

sofern $b \geq a$ gilt.

Den Betrag einer Zahl a stellt man mit dem Symbol $|a|$ dar. Hierbei gilt, dass der Betrag von a immer nichtnegativ ist und wie folgt definiert wird:

$$|a| = a, \quad \text{falls } a \geq 0$$

und

$$|a| = -a, \quad \text{falls } a \leq 0.$$

Also ist der Betrag der Zahl -4 gleich 4. Kürzer schreibt man eine solche Definition auch wie folgt:

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$$

2.1.3 Weitere Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen

Aus der Schule sind uns auch noch andere Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen bekannt, die wir hier noch kurz zur Komplettierung ergänzen wollen, wenngleich wir sie teilweise schon als bekannt vorausgesetzt und verwendet haben.

Es seien a, b und c drei beliebige reelle Zahlen. Dann gelten:

1. Das Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ sowie $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. Das Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ sowie $a \cdot b = b \cdot a$.
3. Das Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

2.2 Potenzen, Binomial-Koeffizienten und der „Binomische Lehrsatz“

Ebenfalls sollten auch die grundlegenden Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen aus der Schule bekannt sein. Wir werden sie aber hier dennoch kurz wiederholen.

Wir bezeichnen nun im Nachfolgenden mit a und b zwei beliebige reelle Zahlen und mit n und m zwei beliebige natürliche Zahlen. Wir führen für $a \neq 0$ folgende Notationen ein:

$$\begin{aligned} a^n &:= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \\ a^{-n} &:= \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n\text{-mal}} \\ a^{1/n} &:= \sqrt[n]{a}. \end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass

$$\begin{aligned} a^{m/n} &= \sqrt[n]{a^m} \\ &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \end{aligned}$$

ist. In dem Spezialfall $m = n = 2$ gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} a^{2/2} &= \sqrt[2]{a^2} \\ &= \sqrt{a^2} \\ &= |a|. \end{aligned}$$

Außerdem setzt man für alle reellen Zahlen a

$$a^0 := 1.$$

Insbesondere ist somit

$$0^0 := 1.$$

Aus den oben angegebenen Notationen folgen nun für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ leicht die aus der Schule bekannten Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}, \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n, \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n, \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m}. \end{aligned}$$

Anmerkung 2.2 Tatsächlich gelten diese Regeln nicht nur für alle $n, m \in \mathbb{N}$, sondern sie gelten, wenn $a > 0$ ist, auch für $n, m \in \mathbb{R}$. Dass dies wirklich so ist, werden wir in einem späteren Kapitel noch genauer sehen.

Anmerkung 2.3 Das Rechnen mit Potenzen ist natürlich von besonderer Wichtigkeit im Zusammenhang mit dem Umrechnen von Maßeinheiten. Wir wollen nun kurz die Basiseinheiten und Abkürzungen des seit 1960 übernommenen SI-Systems (Système Internationale d'Unités) definieren (siehe auch [3, Seite 25 ff.] und [2, Seite 19]).

1. Eine Sekunde (Abkürzung = **s**) ist das 9.192.631.770-Fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes eines Cäsium-133-Atoms entsprechenden Strahlung.
2. Ein Meter (Abkürzung = **m**) ist die Distanz, die das Licht in einem Bruchteil von 1/299.792.458 einer Sekunde durchläuft.

3. Ein Mol (Abkürzung = **mol**) ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso vielen Einzelteilchen besteht, wie es Kohlenstoffatome in 0,012 kg Kohlenstoff-12 gibt.
4. Ein Ampere (Abkürzung = **A**) ist der Strom, der eine festgelegte Kraft zwischen zwei parallelen Drähten im Vakuum erzeugt, die einen Abstand von 1 m haben.
5. Eine Candela (Abkürzung = **cd**) ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle mit der festgelegten Frequenz von 540×10^{12} Hertz, die eine Leistung von 1/683 Watt in eine gegebene Richtung abgibt.
6. Ein Kilogramm (Abkürzung = **kg**) ist die Masse eines internationalen Prototypen in der Form eines Platin-Iridium-Zylinders, der in Paris aufbewahrt wird.
7. Ein Kelvin (Abkürzung = **K** (nicht °K)) ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.

Durch Produkt- und Quotientenbildungen lassen sich aus diesem kohärenten Einheitensystem weitere SI-Einheiten ableiten, wie z. B.:

1. Die Frequenz mit der Einheit ein Hertz (Abkürzung = **Hz**), die definiert ist als die Anzahl der Schwingungen mal s^{-1}.
2. Die Fläche, die in m^2 angegeben wird.
3. Das Volumen, dessen Einheit m^3 ist.
4. Die Geschwindigkeit, die in $m\ s^{-1}$ gemessen wird.
5. Die Beschleunigung, die in $m\ s^{-2}$ angegeben wird.
6. Die Dichte mit der Einheit $kg\ m^{-3}$.
7. Die Kraft, deren Maßeinheit in Newton gemessen wird, wobei 1 Newton (Abkürzung **N**) = $1\ kg\ m\ s^{-2}$ entspricht.
8. Die Viskosität wird in Pascal (Abkürzung = **Pa**) angegeben, wobei

$$1\,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2} = 1\,\mathrm{Pa}$$

entspricht.

Die Vorsilben des SI-Systems sind in der Tab. 2.1 zusammengefasst.

2.2.1 Binomische Formeln

Neben den Potenzgesetzen sollten der Leserin/dem Leser auch die sogenannten Binomischen Formeln aus der Schule bekannt sein.

Es seien a und b zwei beliebige reelle Zahlen, dann gelten die nachfolgenden Formeln:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \tag{2.1}$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \tag{2.2}$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2. \tag{2.3}$$

Tab. 2.1 SI-Vorsilben (siehe auch [3, Seite 28] und [2, Seite 16])

Vorsatz	Symbol	Größe	Zehnerpotenz
Yotta	Y	1.000.000.000.000.000.000.000.000	10^{24}
Zetta	Z	1.000.000.000.000.000.000.000	10^{21}
Exa	E	1.000.000.000.000.000.000	10^{18}
Peta	P	1.000.000.000.000.000	10^{15}
Tera	T	1.000.000.000.000	10^{12}
Giga	G	1.000.000.000	10^{9}
Mega	M	1.000.000	10^{6}
Kilo	k	1000	10^{3}
Hekto	h	100	10^{2}
Deka	da	10	10^{1}
		1	10^{0}
Dezi	d	0,1	10^{-1}
Zenti	c	0,01	10^{-2}
Milli	m	0,001	10^{-3}
Mikro	μ	0,000001	10^{-6}
Nano	n	0,000000001	10^{-9}
Piko	p	0,000000000001	10^{-12}
Femto	f	0,000000000000001	10^{-15}
Atto	a	0,000000000000000001	10^{-18}
Zepto	z	0,000000000000000000001	10^{-21}
Yokto	y	0,000000000000000000000001	10^{-24}

Von der Gültigkeit dieser Gleichungen kann man sich durch das Anwenden des Distributiv- und des Kommutativgesetze schnell selbst überzeugen.

2.2.2 Das Hardy-Weinberg'sche Gleichgewicht

Als Anwendung der oben eingeführten Rechengesetze und -regeln (insbesondere der Potenzregeln und der binomischen Formel) wollen wir uns nun dem *Hardy-Weinberg'schen Gleichgewicht* zuwenden.

Phenylketonurie ist eine autosomal-rezessiv erbliche Stoffwechselkrankheit. Die Mutation, die diese Krankheit verursacht, tritt in der Bundesrepublik Deutschland mit einer Häufigkeit von 1:10.000 auf (vgl. [4, 8] und [12, Seite 1295 f.]). Um jedoch die Wahrscheinlichkeit der Vererbung dieses Merkmals bestimmen zu können, muss man die Häufigkeit der entsprechenden Gene kennen. Dies ist eine Frage, der in der Populationsgenetik nachgegangen wird.

In der Genetik ist es also nicht nur von Interesse zu wissen, wie die Vererbung von Genen bei der Nachkommenschaft von bestimmten Eltern aussieht, sondern man interessiert sich vielmehr auch für die Verteilung der Erbanlagen in der Nachkommenschaft ganzer Populationen. Die Population umfasst alle artgleichen Individuen eines Gebiets, die sich beliebig miteinander paaren können. Der *Genpool* dieser Population bildet den Gesamtbestand der in einer Population vorhandenen Gene (aller Allele), und die Häufigkeit eines Gens wird als *Genfrequenz* in der Population bezeichnet.

Man sagt, dass für eine Population bezüglich eines Genorts mit den Allelen A_1 und A_2 das *Hardy-Weinberg'schen Gleichgewicht* erfüllt ist, wenn für die (relativen) Häufigkeiten p und q der Allele A_1 und A_2 (mit $0 \leq p \leq 1$ und $0 \leq q \leq 1$) und für die Häufigkeiten D, H und R der Genotypen A_1A_1, A_1A_2 bzw. A_2A_2 die Gleichungen

$$D = p^2, \quad H = 2 \cdot p \cdot q, \quad R = q^2 \tag{2.4}$$

und insbesondere

$$D + H + R = 1$$

gelten.

Behauptung 2.4 *Eine Population befindet sich genau dann im Hardy-Weinberg'sche Gleichgewicht, wenn für die Häufigkeiten H, D und R die Gleichung*

$$H^2 = 4DR \tag{2.5}$$

gilt.

Wie kann man nun zeigen, dass (2.5), mit der man bei ihrer Gültigkeit überprüfen kann, ob eine Population tatsächlich im Hardy-Weinberg'schen Gleichgewicht ist, wirklich richtig ist? Wir rechnen die Ausdrücke einfach nach. Wegen der Gleichungen in (2.4) gilt also:

$$(2 \cdot p \cdot q)^2 = 4 \cdot p^2 \cdot q^2 = 4 \cdot D \cdot R = H^2.$$

Jetzt machen wir von der Tatsache Gebrauch, dass die Summe aller Genotypen 100 % der Population entspricht. Das bedeutet in unserem Fall, dass

$$D + H + R = 1$$

ist. Hiermit sehen wir aber, dass

$$\begin{aligned} p^2 &= D = D \cdot 1 = D \cdot (D + H + R) = D^2 + D \cdot H + D \cdot R \\ &= D^2 + D \cdot H + D \cdot \frac{H^2}{4 \cdot D} = D^2 + D \cdot H + \frac{H^2}{4} \\ &= \left(D + \frac{H}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

und dass

$$\begin{aligned} q^2 = R \;=\; R \cdot 1 &= R \cdot (D + H + R) = R \cdot D + R \cdot H + R^2 \\ &= R^2 + R \cdot H + R \cdot \frac{H^2}{4 \cdot R} = R^2 + R \cdot H + \frac{H^2}{4} \\ &= \left(R + \frac{H}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

gilt. Wir haben für p und q somit die Darstellungen

$$\begin{aligned} p &= \left(D + \frac{H}{2}\right), \\ q &= \left(R + \frac{H}{2}\right) \end{aligned}$$

gezeigt. Hiermit berechnen wir:

$$\begin{aligned} 2 \cdot p \cdot q &= 2 \cdot \left(D + \frac{H}{2}\right) \cdot \left(R + \frac{H}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \left(D \cdot R + D \cdot \frac{H}{2} + R \cdot \frac{H}{2} + \frac{H^2}{4}\right) \\ &= 2 \cdot D \cdot R + D \cdot H + R \cdot H + \frac{H^2}{2} \\ &= \frac{H^2}{2} + D \cdot H + R \cdot H + \frac{H^2}{2} \\ &= H \cdot (H + D + R) = H. \end{aligned}$$

Damit haben wir also die Gültigkeit von (2.5) nachgewiesen. (Vergleiche hierzu z. B. auch [18, Beispiel 1.10 b, Seite 11 f.].)

Beispiel 2.1 (Anwendung des Hardy-Weinberg'schen Gleichgewichts) Das Hardy-Weinberg'sche Gleichgewicht wird also unter anderem für Untersuchungen und analytische Überlegungen beim Auftreten von Erbkrankheiten herangezogen. Als Letalfaktoren bezeichnet man Mutationen, die in homozygoter Form zum Tod des Lebewesens in einem frühen Entwicklungsstadium führen. Bei allen Lebewesen können derartige Letalfaktoren entstehen und in nachfolgenden Generationen weiterhin auftreten. Wir wollen nun im Nachfolgenden mit L_f einen derartigen Letalfaktor bezeichnen. Wenn man die Zusammensetzung der Population nach dem Hardy-Weinberg'schen Gleichgewicht bestimmen will, so muss man hierbei berücksichtigen, dass die Individuen vom Genotyp $L_f L_f$ nicht überleben können. Die Häufigkeit dieser Individuen ist in der Formel von Hardy und Weinberg durch die Größe $R = q^2$ dargestellt. Wir haben bei den vorangegangenen Überlegungen gesehen, dass in der Ausgangsgesamtpopulation

$$D + H + R = 1 \quad \text{also } p^2 + 2pq + q^2 = 1$$

gilt. Die Individuen vom Genotyp $L_f L_f$ sterben jedoch schon in einem frühen Lebensstadium und sind nicht mehr in der Population enthalten, die sich vermehren kann. Somit ist dieser Anteil an der Ausgangspopulation zunächst von der Gesamtpopulation abzuziehen, weshalb wir die Gleichung

$$D + H = 1 - R \quad \text{bzw. } p^2 + 2pq = 1 - q^2$$

erhalten. Für die Vererbung des Letalfaktors tritt dieser „neue“ Ausdruck an die Stelle der Gesamthäufigkeit. Da diese „neue“ Gesamthäufigkeit also nicht mehr 1 bzw. 100 % ist, sondern nur noch $1-q^2$, müssen wir den Ausdruck zunächst wieder „auf 1 setzen“. Hierfür normieren wir die Gleichung derart, dass auf der rechten Seite wieder eine 1 steht. D. h., man teilt die Gleichung durch den Faktor $1 - q^2$ $(= 1 - R)$. Dies führt uns auf:

$$\frac{D + H}{1 - R} = 1 \quad \text{bzw. } \frac{p^2}{1 - q^2} + \frac{2pq}{1 - q^2} = 1.$$

In der Filialgeneration ist der Letalfaktor L_f weiterhin enthalten und wird auch weiterhin vererbt, da er von den Heterozygoten weiter mitgetragen wird. Die Häufigkeit der Heterozygoten in der sich vermehrenden Gesamtpopulation ist durch

$$\frac{H}{1 - R} = \frac{2pq}{1 - q^2}$$

gegeben. Die Häufigkeit des Letalfaktors ist in der ersten Filialgeneration somit durch

$$\frac{H}{2 \cdot (1 - R)} = q_{F1} = \frac{pq}{1 - q^2}$$

gegeben bzw., da $p = 1 - q$ ist,

$$q_{F1} = \frac{q(1 - q)}{1 - q^2} = \frac{q}{1 + q}.$$

Insgesamt ist somit von Generation zu Generation eine Abnahme der Häufigkeit q des Letalfaktors L_f in der Population zu beobachten, da die Homozygoten nicht lebensfähig sind und aussterben. Betrachtet man die erste Nachkommengeneration, so gilt für die Differenz der Häufigkeit q_{F1} des Letalfaktors L_f der Filialgeneration $F1$ und der Häufigkeit q_P des Letalfaktors L_f der ersten Parentalgeneration:

$$q_{F1} - q_P = \frac{q(1 - q)}{1 - q^2} - q = -\frac{q^2(1 - q)}{1 - q^2} = -\frac{q^2}{1 + q^2} = -\frac{R}{1 + R} < 0.$$

Die Abnahme der Häufigkeit des Letalfaktors hängt demnach davon ab, wie häufig der Letalfaktor in der Population der Elterngeneration vertreten ist. Wenn in der ursprünglichen Ausgangssituation q groß ist, nimmt die Frequenz von Generation zu Generation zunächst stark ab. Demzufolge wird q von Generation zu Generation rasch kleiner, was gleichbedeutend damit ist, dass nur noch wenige Individuen den Letalfaktor in sich tragen. Für anfänglich kleine q in der ursprünglichen Elterngeneration wird dann jedoch dieser Wert für die Tochtergenerationen nur noch langsam abnehmen. Bei einer Frequenz q des Letalfaktors von 3 % ist somit die Abnahme der Häufigkeit je Generation lediglich etwa 0,09 %. (Vgl. hierzu auch [8, Seite 183 f.].)

Anmerkung 2.4 Dem Hardy-Weinberg'schen Gleichgewicht werden wir auch noch einmal später im Zusammenhang mit „bedingten Wahrscheinlichkeiten" und dem „Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit" in Beispiel 13.11 und in Exkurs 13.3 begegnen. Leser, die noch mehr über das Hardy-Weinberg'sche Gleichgewicht nachlesen wollen, verweise ich z. B. auf [4, 8] und [19].

Wie bereits erwähnt, kann sich jede Leserin/jeder Leser durch einfaches „Ausmultiplizieren" über die Korrektheit von (2.1) und (2.2) selbst Rechenschaft ablegen. Neben diesen Formeln gibt es aber auch noch eine Verallgemeinerung. Diese ist unter dem Begriff „*der Binomische Lehrsatz*" geläufig. Der binomische Lehrsatz gibt formelmäßig an, wie man den Ausdruck $(a+b)^n$ schreiben kann, wenn n eine natürliche Zahl oder die Null ist. Hierfür benötigen wir jedoch die Einführung einiger weiterer mathematischer Ausdrücke, die den meisten Lesern/Leserinnen sicherlich unbekannt sein werden.

2.2.3 Binomial-Koeffizienten und der „Binomische Lehrsatz"

Für eine natürliche Zahl n wird mit der Notation $n!$ das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n bezeichnet. Das „Ausrufungszeichen" bewirkt also, dass alle Zahlen von 1 bis n miteinander multipliziert werden. Man schreibt $n!$ und liest es als *n Fakultät*. Also ist

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

wobei

$$0! := 1$$

gesetzt wird.

Mit dem Symbol

$$\binom{n}{k}$$

wird ein sogenannter Binomial-Koeffizient geschrieben. Diese Notation steht, wenn n eine natürliche Zahl und k eine ganze Zahl bezeichnet, für den nachfolgenden

Ausdruck:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}, & \text{für } n > k \\ 0, & \text{für } n < k \\ 0, & \text{für } k < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Für das Rechnen mit Binomial-Koeffizienten gelten für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ die nachfolgenden Rechenregeln:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \tag{2.7}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{2.8}$$

Man überzeugt sich durch Nachrechnen, dass diese Rechenregeln ihre Gültigkeit besitzen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))!\cdot(n-k)!} \\ &= \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

womit (2.7) folgt. Um (2.8) zu zeigen, überlegen wir uns, dass für $n \geq 1$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}$$

und

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!\cdot((n-1)-k)!}$$

gilt. Nun addieren wir die beiden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!\cdot((n-1)-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!\,(k+(n-k))}{(n-k)!k!}\\ &= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Also gilt auch die Aussage (2.8).

Mithilfe dieser neuen Begriffe und Symbole können wir eine allgemeingültige Formel für den Ausdruck

$$(a+b)^n$$

angeben. Es gilt:

Theorem 2.1 (Binomischer Lehrsatz)
Sind $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k. \tag{2.9}$$

Wie kann man nun zeigen, dass eine so allgemeine Behauptung wirklich stimmt? Eine solche Aussage, die für alle natürlichen Zahlen ihre Gültigkeit behalten soll, beweist man mit dem *Prinzip der vollständigen Induktion*.

2.3 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist ein sehr wichtiges Beweisprinzip bzw. Hilfsmittel in der Mathematik, um Behauptungen, die von einer festen natürlichen Zahl an oder sogar von Null an für alle natürlichen Zahlen gelten sollen, nachzuweisen.

Die Idee, die dahintersteckt, kann man sich wie das Besteigen einer unendlich langen Leiter vorstellen. Zuerst erklimmt man die erste Leitersprosse, um sich davon zu überzeugen, dass überhaupt Sprossen zum Besteigen vorhanden sind. Dann klettert man immer weiter, basierend auf dem Vertrauen, dass das Erklimmen einer beliebigen Sprosse genauso vonstatten geht wie das Erklimmen der bereits hochgekletterten Leitersprossen. Dies mag auf den ersten Blick komisch klingen, doch wollen wir dieses Bild zunächst in unserem Hinterkopf behalten, da dann die Vorgehensweise klarer werden kann.

1. Induktionsanfang (Erklimmen der ersten Sprosse.)
   Der sogenannte *Induktionsbeweis* beginnt mit dem Induktionsanfang bzw. der Induktionsverankerung. In unserem Bild entspricht dies dem Erklimmen der ersten Leitersprosse. Wenn man noch nie eine Sprosse bestiegen hat, so weiß man nicht, ob diese einen wirklich hält und ob man sie überhaupt für das Erklimmen der Leiter gebrauchen kann.
   Für uns heißt dies also, dass wir zunächst überprüfen müssen, ob die von uns aufgestellte Behauptung auch wirklich für wenigstens eine natürliche Zahl n_0 gültig ist, oder ob sie bereits für diese von uns gewählte natürliche Zahl falsch ist. Im zweiten Fall müssten wir gar nicht weitermachen, da die Aussage ja dann nicht für alle natürlichen Zahlen gelten kann. Da die Behauptung für alle natürlichen Zahlen inklusive der Null gelten soll, nehmen wir einfach die kleinste der Zahlen, für die die Aussage gelten soll und rechnen die Aussage für diese Zahl nach. In unserem Fall also für $n_0 = 0$. Für $n = n_0$ lautet die zu beweisende Aussage also:
   $$(a+b)^{n_0} = (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} a^{n_0-k} b^k = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$
   Nun ist $(a+b)^0$ nach den bereits wiederholten Potenzgesetzen gleich 1. Die Summe auf der rechten Seite der Gleichung geht von $k = 0$ bis $k = 0$, d. h., sie besteht nur aus dem Summanden
   $$\binom{0}{0} a^{0-0} b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$
   Also gilt die Aussage zumindest schon einmal für $n = 0$. Die erste Leitersprosse hat uns also gehalten, als wir auf sie gestiegen sind.
2. Induktionsvoraussetzung (Stehen auf der n-ten Sprosse.)
   Jetzt nehmen wir einfach an, dass wir bereits auf der n-ten Sprosse angekommen sind und alle Sprossen gehalten haben. Das bedeutet, dass wir einfach annehmen, dass die von uns nachzuweisende Behauptung für die Zahlen 0 bis einschließlich n gilt. Die Induktionsvoraussetzung ist also die Aussage:
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$
3. Induktionsbehauptung (Die $(n+1)$-Sprosse erspähen.)
   Anstatt nun zu behaupten, dass uns alle Sprossen der unendlich langen Leiter tragen werden, behaupten wir nun lediglich, dass uns auch die nächste tragen wird, da es ja bislang gut gegangen ist und uns das kölsche Lebensmotto „et hätt

noch immer jot jejange“ in dieser Situation Mut zuspricht. Wir behaupten also, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt. Somit lautet die Induktionsbehauptung:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

4. Induktionsschritt (Den Schritt von der n-ten Sprosse auf die $(n+1)$-Sprosse vornehmen)
Jetzt wollen wir mit dem Wissen, dass wir uns schon auf der n-ten Sprosse befinden, eine Sprosse weiter hochklettern. Wir wollen also die Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung beweisen. Hierzu dürfen wir natürlich auch auf alle uns bekannten Rechenregeln zurückgreifen. Wir wissen, dass nach den Potenzgesetzen

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$$

ist. Für den Ausdruck $(a+b)^n$ haben wir jetzt aufgrund der Induktionsvoraussetzung eine Darstellung griffbereit. Somit erhalten wir also:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) \cdot (a+b)\end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir die rechte Seite der Gleichung aus. Dies gibt uns die Gleichung:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b)\\ &= a \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right) + b \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\right).\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir einen Trick. Da Binomial-Koeffizienten gleich Null sind, wenn $k > n$ ist, und somit

$$\binom{n}{n+1} = 0$$

und auch

$$\binom{n}{n+1} a^0 b^{n+1} = 0$$

gelten, können wir die erste Summe wie folgt umschreiben.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k\right)+\binom{n}{n+1}a^0b^{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k.\end{aligned}$$

Wir haben also eine sogenannte *nahrhafte Null* zu der Summe dazu addiert. Eine „nahrhafte Null" ist ein Term, der den Wert Null hat, dessen zusätzliche Erwähnung bzw. Verwendung jedoch Rechenschritte erlaubt, die ohne ihn nicht möglich sind.
Auch bei der zweiten Summe machen wir von einem kleinen mathematischen Trick Gebrauch. Statt die Summe von $k = 0$ laufen zu lassen, lassen wir sie erst von $k = 1$ laufen. Damit die Summe sich aber nicht ändert, müssen wir auch bei den Summanden etwas verändern. Dies führt auf:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^k\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k.\end{aligned}$$

Von der Gültigkeit dieser Gleichung sollte sich jeder Leser/jede Leserin zur Übung selbst überzeugen. Neben diesem Trick müssen wir noch eine zusätzliche Änderung vornehmen. Auch hier addieren wir zur letzten Summe eine sogenannte *nahrhafte Null* hinzu. Wir bemerken also Folgendes:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k &= 0+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\ &= \binom{n}{-1}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k.\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass wir somit die Gültigkeit der Gleichung

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}
$$

gezeigt haben. Damit haben wir die allgemeine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen und sind an das Ende des Induktionsbeweises gelangt.

Aus dem Binomischen Lehrsatz kann man nun unter anderem zwei Folgerungen ziehen, die wir hier entsprechend herausstellen wollen.

Folgerung 2.1 *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gelten:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0. \tag{2.11}$$

Binomial-Koeffizienten kommen nicht nur im Zusammenhang mit der Binomischen Formel vor. Sie werden oft auch im Zusammenhang mit der Anzahl an möglichen Ausgängen von Versuchen verwendet. Wir geben deshalb hier noch ein weiteres Beispiel für die Verwendung von Binomial-Koeffizienten an.

Beispiel 2.2 Gene, die das gleiche Merkmal betreffen und an einander genau entsprechenden Orten der Chromosomen (Genloci) liegen, bezeichnet man als Allele. In einem Gewächshaus gebe es eine große Anzahl an reinerbigen Löwenmäulchen-Pflanzen, die dort in acht unterschiedlichen Farben blühen. Es liegen somit acht unterschiedliche, die Blütenfarbe bestimmende Allele $C_1, \ldots, C_8$ innerhalb der Löwenmäulchen-Population vor. Wenn man nun die Pflanzen untereinander kreuzt und hierbei nicht auf die Blütenfarbe achtet, wie viele mögliche Genkombinationen bzw. Genotypen sind dann möglich? Zur Beantwortung dieser Frage zählen wir also zunächst alle Kombinationen von zwei unterschiedlichen Allelen, die aus den acht Allelen ausgewählt werden können, also die Kombinationen C_1C_2, C_2C_4 etc. Es gibt insgesamt

$$\binom{8}{2} = 28$$

solcher Kombinationen. Als Nächstes zählen wir noch die Kombinationen mit Wiederholungen ein und desselben Alleles, d. h. die Kombinationen, bei denen erneut reinerbige Pflanzen durch die Kreuzung entstehen, also die Kombinationen C_1C_1, C_2C_2, ... etc. Hiervon gibt es offenbar acht Stück, womit sich eine Gesamtanzahl von

$$28 + 8 = 36$$

möglichen Kombinationen ergibt.

Bevor wir mit dem Stoff weitergehen, wollen wir noch ein weiteres Beispiel für einen Beweis mit dem Prinzip der vollständigen Induktion geben.

Beispiel 2.3 Es gilt die folgende Behauptung:

Für alle $x \neq 1$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{2.12}$$

Die hier angegebene Summe nennt man auch Partialsumme der geometrischen Reihe.

Wir gehen genauso wie im vorangegangenen Induktionsbeweis vor.

1. Induktionsanfang
   Wir müssen also überprüfen, ob die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wir wählen hier das erste n für das die Aussage gelten soll. Dies ist in diesem Fall die Zahl $n_0 = 0$. Hierfür rechnen wir zunächst einfach die Behauptung nach. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n_0} x^k &= \sum_{k=0}^{0} x^k \\ &= x^0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

   Andererseits ist auch

$$\begin{aligned}\frac{1 - x^{n_0+1}}{1 - x} &= \frac{1 - x}{1 - x} \\ &= 1.\end{aligned}$$

   Womit wir die Behauptung für $n_0 = 0$ gezeigt hätten.
2. Induktionsvoraussetzung
   Unsere Induktionsvoraussetzung lautet in diesem Fall:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

3. Induktionsbehauptung
   Die Induktionsbehauptung wird in diesem Fall zu:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

4. Induktionsschritt
   Wir bemerken zunächst das Nachfolgende:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Wegen unserer Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass die Gleichheit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x^k \\ &= x^{n+1} + \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

ihre Gültigkeit besitzt. Nun ist aber

$$\begin{aligned} x^{n+1} + \frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= \frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x} + \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{x^{n+1}(1-x) + (1-x^{n+1})}{1-x} \\ &= \frac{x^{n+1} - x^{n+2} + 1 - x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich also:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x},$$

was auch unsere Behauptung gewesen ist. Somit haben wir die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nachgewiesen. Die Voraussetzung $x \neq 1$ ist nötig, da sonst der Nenner auf der rechten Seite null wäre und somit die rechte Seite nicht definiert ist.

Anmerkung 2.5 Wenn $x \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $|x| < 1$ erfüllt, so wird der Ausdruck $|x|^n$ für immer größer werdendes n immer kleiner und näher sich immer mehr dem Wert null an. Wir sehen also, dass je mehr Summanden wir in $\sum_{k=0}^{n} x^k$ zulassen, umso mehr nähert sich der Wert dieser Summe dem Wert des Bruchs $1/(1-x)$ an. Diesen Sachverhalt kann man im Zusammenhang mit Grenzwertbetrachtungen (siehe Definition 6.3) mathematisch nachweisen. Man schreibt hierfür

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Den Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \tag{2.13}$$

nennt man die *geometrische Reihe*.

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion kann man z. B. auch bei der Verifizierung von Rekursionsformeln zur Angabe von Populationsgrößen verwenden, wie das nachfolgende Beispiel 2.4 zeigt.

Beispiel 2.4 In seinem 1202 erstmals erschienenen Buch *Liber abaci* beschreibt Leonardo von Pisa, der auch Fibonacci genannt wurde, die Entwicklung einer Kaninchenpopulation (siehe Abb. 2.3). Hierbei formulierte er zunächst die von ihm gemachten Beobachtungen, die er für seine Überlegungen als feststehende Annahmen zugrunde legte und deren Übersetzung wir hier aus [6, Seite 85] übernehmen:

> Wie viele Kaninchenpaare entstehen in einem Jahr aus einem Kaninchenpaar? Jemand sperrte ein Kaninchenpaar in ein Gelände ein, das auf allen Seiten von Mauern umgeben war; er wollte herausbekommen, wie viele Kaninchenpaare aus diesem einen Paar in einem Jahr hervorgingen. Bei den Kaninchen ist es nun so, dass sie jeden Monat ein neues Paar in die Welt setzen; und damit fangen sie an, sobald sie zwei Monate alt sind. Da das erwähnte erste Paar gleich mit der Fortpflanzung beginnt, muss man es mal zwei nehmen, macht zwei Paare in einem Monat. Von diesen wirft eines, nämlich das ursprüngliche, im zweiten Monat, das gibt drei Paare nach zwei Monaten. Von diesen werfen zwei im nächsten Monat, macht fünf Paare nach drei Monaten. (…) und so kann man bis zu beliebig vielen Monaten der Reihe nach weitermachen.

Natürlich sind die hier von Leonardo von Pisa den Überlegungen zugrunde gelegten Annahmen ideal und somit von der Realität etwas entfernt. Wenn man jedoch ohne Berücksichtigung der Realität den Tod von Kaninchen der beobachteten Population zunächst einmal vernachlässigt, so wird die Anzahl der Kaninchen in der beobachteten Population nach $(n+1)$ Vermehrungsschritten durch die Formel

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1) \quad \text{mit } F(1) = F(2) = 1 \tag{2.14}$$

beschrieben. Hierbei sind die $F(n)$ durch den nachfolgenden Ausdruck gegeben:

$$F(n) := \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{2.15}$$

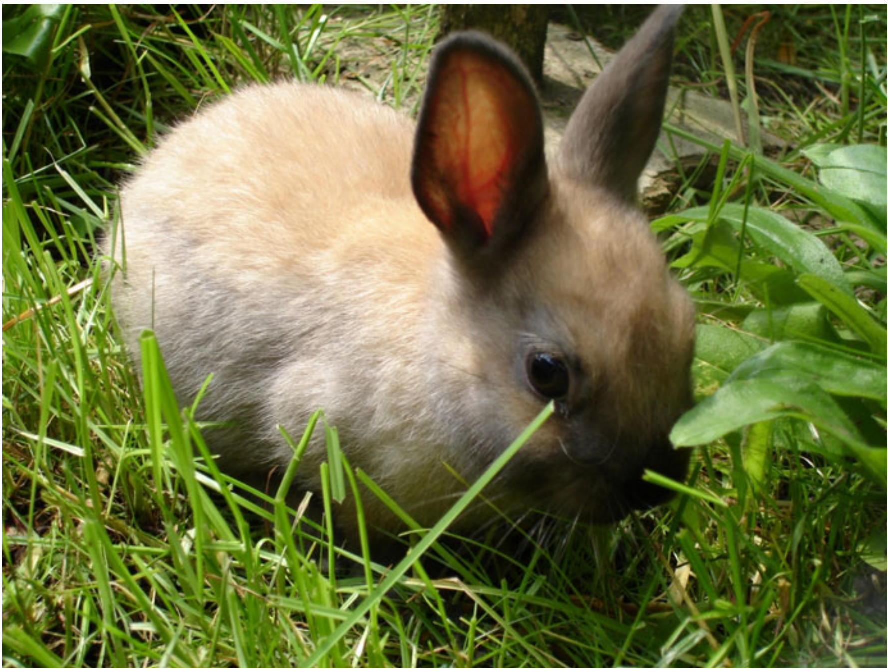


Abb. 2.3 Ein junges Thüringer Zwergkaninchen. Foto: *Dirk Horstmann*

Somit wird also die Populationsgröße nach dem $(n + 1)$-ten Vermehrungsschritt mithilfe der Populationsgröße im vorangegangenen und noch einem vorherigen Vermehrungsschritt berechnet. Eine derartige Berechnungsvorschrift, die mithilfe vorangegangener Schritte erfolgt, nennt man eine *Rekursionsformel*. (Wie man auf diesen Ausdruck kommt, werden wir in einem späteren Kapitel (siehe Kap. 12) noch genau sehen und herleiten. Zum jetzigen Zeitpunkt jedoch hinterfragen wir diesen Ausdruck nicht und nehmen ihn als gegeben hin.)

Dass die oben angegebene Rekursionsformel zur Berechnung der Anzahl der Kaninchenpopulation nach der nächsten Vermehrungsphase ihre Gültigkeit hat, beweist man mithilfe einer vollständigen Induktion über den Vermehrungsschritt n (vgl. Übungsaufgabe 2.5). Die so entstehende Zahlenfolge nennt man *Fibonacci-Folge*. Folgt man nun dieser Rekursionsformel, so kommt man mit dieser Rechnung (wie Leonardo von Pisa zu seiner Zeit auch) auf 377 Kaninchenpaare am Ende eines Jahres.

26 Jahre nachdem die „Liber Abaci“ das erste Mal veröffentlicht wurden, kam es auf Veranlassung von Kaiser Friedrich II. von Hohenstaufen zur „zweiten Auflage“ dieses Werks. Ohne die Bewunderung, die Friedrich der II von Hohenstaufen den Rechenkünsten und der Person Leonardo von Pisas entgegenbrachte, wäre die im Buch enthaltene erste umfassende Darstellung eines neuen auf arabischen Zahlen basierenden Rechensystems, das das alte römische Zahlensystem ablösen sollte,

voraussichtlich nicht erneut und somit weiter verbreitet worden. Es ist also Leonardo von Pisa zu verdanken, dass wir Westeuropäer noch heute das arabische Zahlensystems systematisch gebrauchen. (Zu dem Thema „Fibonacci-Zahlen“ vgl. und siehe auch [6, Seite 84–86].)

Exkurs 2.2

Die Fibonacci-Zahlen faszinieren immer wieder eine Vielzahl von Menschen. Zwar wird die Anzahl von Kaninchenpaaren in der Realität selbst dann nicht entsprechend der Fibonacci-Zahlenfolge anwachsen, wenn man ein Kaninchenpaar in ein Gehege setzt, aus dem die Kaninchen nicht entwischen können, da die Lebenserwartung von Kaninchen anders als bei der von Fibonacci vorgenommenen Modellierung angenommen, nicht unendlich ist, doch kann man die Fibonacci-Zahlen in der Natur auch in anderen Zusammenhängen durchaus wirklich „begegnen“. Dies ist z. B. bei der Spiralenbildung durch Blätter, Fruchtblätter und Samen von Pflanzen der Fall (vgl. Abb. 2.4 und 2.5).

Durch einen Blick z. B. auf eine Sonnenblume kann jede Leserin/jeder Leser leicht selbst nachprüfen, dass Blätter und Samen von Pflanzen oftmals in Spiralen angeordnet sind (siehe Abb. 2.4). Wenn man sich zum Beispiel die Mühe macht und die Anzahl der linksläufigen und die Anzahl der rechtsläufigen Spiralen einer Sonnenblume zählt, so ergeben sich hierbei in den allermeisten Fällen zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen. Bei den meisten Sonnenblumen zählt man 55 rechtsdrehende und 34 linksdrehende Spiralen. Für einige (jedoch seltenere) Arten sind dies mitunter jedoch auch nur 21 und 34 Spiralen. Wenn man Riesensonnenblumen betrachtet, so kann man hier mitunter sogar 144 und 233 Spiralen nachzählen.

Die „Lehre der Blattstellungen von Pflanzen“ nennt man Phyllotaxis. Für diverse Blattstellungen von Pflanzen gibt es inzwischen theoretische Modelle, die auch das in diesem Zusammenhang festzustellende Auftreten der Fibonacci-Zahlen detaillierter erklären können. Jede Pflanze besitzt bei der für sie spezifischen Blattstellung einen eigenen charakteristischen Drehwinkel. Bereits kleine Änderungen dieses Drehwinkels ergeben gravierende Änderungen der Blattstellungen und somit auch in der möglichen „Lichtausbeute“. Den Drehwinkel zwischen zwei Blatt- oder Knospenansätzen nennt man den Divergenzwinkel (vgl.

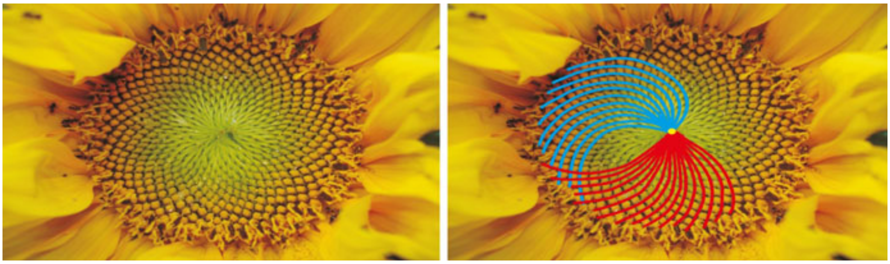


Abb. 2.4 Eine Sonnenblumenblüte und die Spiralen. Foto: *Dirk Horstmann*

Abb. 2.5 Pflanzen und die Stellung ihrer Fruchtblätter. Fotos: *Dirk Horstmann*

Abb. 2.6). Regelmäßige Blattstellungen haben für die Pflanzen durchaus einen Vorteil, da hieraus eine möglichst große Lichtausbeute resultiert, die die Pflanzen wiederum für die Fotosynthese benötigen.

Dass es bei der Blattstellung von Pflanzen nachweisbare Regelmäßigkeiten gibt, haben die deutschen Botaniker K. F. Schimper (15.02.1803–21.12.1867) und A. Braun (10.05.1805–29.03.1877) bereits im 19. Jahrhundert entdeckt. Die Regelmäßigkeit wurde daher nach ihnen benannt und wird als Schimper-Braun'sche Hauptreihe bezeichnet, die die am häufigsten vorkommenden Divergenzwinkel enthält. Die in der Schimper-Braun'schen Hauptreihe den Blattstellungen zugrunde liegenden und hierbei auftretenden Divergenzwinkel D_n lassen sich mit der Formel

$$D_n = \frac{F(n)}{F(n+2)} \cdot 360^\circ$$

angeben, wobei die $F(n)$ die oben angegebenen Fibonacci-Zahlen sind.

Natürlich gibt es auch Blattstellungen, bei denen keine Spiralen auftreten bzw. deutlich sichtbar werden. Den einfachsten Fall einer solchen Blattanordnung kann man z. B. bei Brennnesseln beobachten, bei denen die Blätter jeweils in Reihen übereinanderstehen, wobei sich je zwei Blätter gegenüberstehen. Der Divergenzwinkel beträgt hierbei also exakt 180°. (Mehr über Phyllotaxis kann

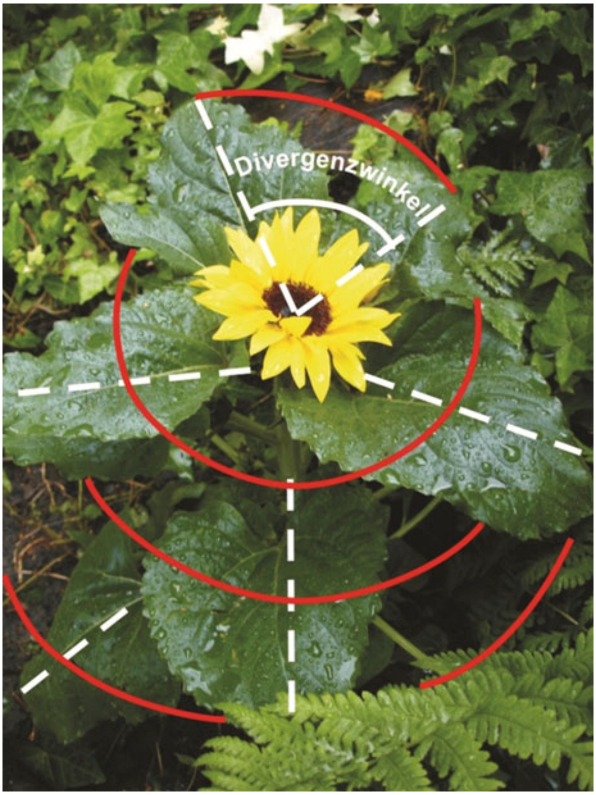


Abb. 2.6 Eine Sonnenblume und die Stellung ihrer Blätter mit dem dazugehörigen Divergenzwinkel. Foto: *Dirk Horstmann*

man auch in dem Buch „Phyllotaxis: Plant Morphogenes: A Systemic Study in Plant Morphogenesis“ von Roger V. Jean (siehe [7]) nachlesen. Oder siehe hierzu auch [1, 9] und [10, Seiten 31–46].)

Abgesehen davon, dass man mithilfe eines Geodreiecks, eines Zirkels und den Fibonacci-Zahlen sehr einfach eine perfekte Spirale zeichnen kann (vgl. Abb. 2.7), wird oftmals auch noch ein anderes Beispiel, in dem Fibonacci-Zahlen vorkommen, angeführt, das jede Leserin und jeder Leser leicht einmal selbst an sich überprüfen kann. Auch wenn das nachfolgende „Auftreten von Fibonacci-Zahlen in der Natur“ von wissenschaftlichen Arbeiten durchaus kontrovers diskutiert wird (siehe z. B. [5] und [11]), schauen wir uns doch einfach einmal unsere Hände und hierbei insbesondere die Längen unserer Fingerglieder an.

Zunächst misst man die Längen der Fingerglieder seines Mittelfingers sowie die Länge seiner Hand bis zur Handwurzel und „normiert“ anschließend die Messungen derart, dass die Länge des ersten Fingerknochens des Mittelfingers, also dem Teil des Fingers mit dem Fingernagel, als die Längeneinheit „1“ gesetzt wird. Bei einem solchen Vorgehen sieht man, dass im idealtypischen Fall der zweite Fingerknochen doppelt so lang, der nächste ungefähr dreimal so lang und der Handknochen bis zum Handgelenk ungefähr fünfmal so lang ist. Die Zahlen 1, 2, 3, 5 bilden den Teil einer Fibonaccifolge.

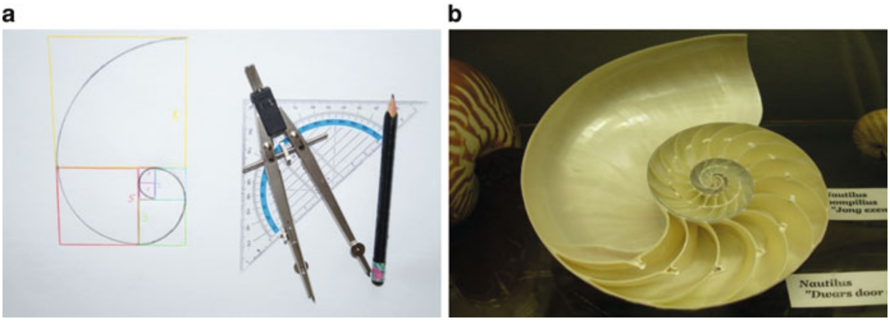


Abb. 2.7 Eine mithilfe der Fibonacci-Zahlen, einem Geodreieck und einem Zirkel gezeichnete Spirale (**a**), sowie die aufgeschnittene Schale eines Nautilus mit der dabei deutlich sichtbaren Spirale (**b**). Fotos: *Dirk Horstmann*

2.4 Der Umgang mit fehlerhaften Daten/Rechnen mit Fehlern

Generell gibt es die unterschiedlichsten Gründe, durch die sich Fehler in Rechnungen einschleichen können. Als Ursprünge von Fehlern lässt sich jedoch oft eine der nachfolgenden möglichen Quellen identifizieren:

1. Aus der Modellierung resultierende Fehler, die dabei entstehen können, wenn man ein konkretes Problem in die mathematische Sprache übersetzt und hierbei z. B. eine Annahme macht, die sich bei einer Überprüfung als falsch herausstellt, oder aber einen grundlegenden Modellierungsfehler begeht, indem man z. B. eine wichtige Voraussetzung vergisst (also sozusagen einen menschlichen Modellierungsfehler begeht).
2. Fehler in der dem angewendeten mathematischen Modell zugrunde liegenden Datenbasis, die durch Ungenauigkeit bei der Datenerhebung (z. B. durch Messungenauigkeiten aufgrund von Unachtsamkeit, Ungenauigkeit der Messgeräte oder Ähnlichem) entstehen können.
3. Sogenannte Abbruchfehler, die darauf zurückzuführen sind, dass man bei einer Berechnungen nur eine endliche, fest vorgegebene Zahl an Rechenschritten durchführt, obwohl eigentlich noch weitere oder sogar unendliche viele Rechenschritte zur genauen Berechnung notwendig wären (z. B. bei der Ersetzung von Grenzwertbildungen).
4. Auf vorgenommenen Rundungen basierende Fehler (Rundungsfehler).
5. Eingabefehler, die durch eine unachtsame Eingabe der erhobenen Daten entstehen können (auch dies ist ein menschlicher Fehler).

Fehler, die zu der vierten Fehlerquelle gehören und auf die wir unser Augenmerk hier legen wollen, sind uns allen aus dem Alltag bestens bekannt, auch wenn es uns vielleicht nicht direkt ganz bewusst ist. So wird den meisten Leserinnen/Lesern der Taschenrechner ein lieb gewordenes Hilfsmittel im Zusammenhang mit durchzuführenden Rechnungen geworden sein. In der Tat ist es so, dass uns bei Anwendungen in der Regel die Genauigkeit eines Taschenrechners genügen wird. Allerdings muss man sich immer im Klaren darüber sein, dass uns der Taschenrechner im Zweifelsfall nicht das exakte Ergebnis liefert, da er nur eine bestimmte Anzahl von Stellen hinter dem Komma anzeigen kann. Dies führt jedoch dazu, dass wir bei mehreren hintereinander ausgeführten Rechnungen mit falschen Werten arbeiten und die Fehler, die durch Runden der Werte entstanden sind, mitgeschleppt und eventuell sogar verschlimmert werden. Deshalb wollen wir uns nun dem Rechnen mit fehlerhaften Zahlen zuwenden.

Wie erwähnt, sind die bei Rechnungen verwendeten Zahlen unter Umständen mit Fehlern behaftet oder nur experimentell gewonnene Näherungswerte. Wenn die Zahlen durch Messungen gewonnen wurden, so können Messfehler zu Ungenauigkeiten in der Versuchsauswertung führen und umgekehrt. Auch das Rechnen mit einem Computer oder dem eben erwähnten Taschenrechner kann zu Fehlern führen. Wenn wir mit x_F den Näherungswert einer Zahl mit dem exakten Wert x bezeichnen, so bezeichnet die Differenz dieser beiden Werte

$$AbsF(x_F) := x_F - x$$

den *absoluten Fehler* von x_F und das Verhältnis $AbsF(x_F)/x$ den *relativen Fehler*.

Wenn man beispielsweise x_F durch das Runden auf n-Nachkommastellen erhalten hat, so ist

$$|AbsF(x_F)| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-n}.$$

Wir nehmen an, dass wir für zwei fehlerhaften Zahlen x_F und y_F die exakten Daten x und y kennen und dass für diese die Größenbeziehung $x > y > 0$ erfüllt ist. Wenn man nun die Differenz dieser beiden Zahlen x_F und y_F mit den dazugehörigen absoluten Fehlern $AbsF(x_F)$ und $AbsF(y_F)$ bilden will, so ist der relative Fehler von $x_F - y_F$ durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{AbsF(x_F) - AbsF(y_F)}{x-y} &= \frac{x_F - x - (y_F - y)}{x-y} \\ &= \frac{x_F - x - y_F + y}{x-y} = \frac{x_F - x}{x-y} - \frac{y_F - y}{x-y} \\ &= \frac{x}{x-y}\left(\frac{AbsF(x_F)}{x}\right) - \frac{y}{x-y}\left(\frac{AbsF(y_F)}{y}\right). \end{aligned}$$

Wenn die Werte von x und y nahe beieinander liegen, wird der Fehler somit sehr groß. D. h., dass relative Fehler mitunter extrem verstärkt werden können. Dies kann man noch deutlicher sehen, wenn man zwei (oder mehrere) fast gleichgroße Zahlen voneinander subtrahieren will. In diesem Fall heben sich die Ziffern vor dem Komma gegenseitig weg. Die Differenz dieser Zahlen ist somit annähernd null, und das Ergebnis hängt in einem solchen Fall von „hinteren" Ziffern ab, die jedoch den jeweiligen (Rundungs-)Fehler beinhalten. (Siehe hierzu z. B. auch [14, Kapitel 1.2 „Fehlerquellen", Seiten 7–15] und [18, Seiten 17 ff.].)

Beispiel 2.5 Bei Eingabe des Bruchs $x = 1/3$ in einen Taschenrechner erhält man je nach Taschenrechner den Wert $x_F = 0{,}333333333$ angezeigt. Wenn man $y = 2/3$ in denselben Taschenrechner eingibt, so ergibt sich der Wert $y_F = 0{,}666666667$. Wenn man also mit diesem Taschenrechner $y_F - x_F$ berechnet, so erhält man den Wert 0,333333334. Allerdings ist $y - x = 1/3$, und selbst der Taschenrechner würde hier nicht den Wert 0,333333334 angeben.

Beispiel 2.6 Benzpyren ist ein pentacyclischer aromatischer Kohlenwasserstoff, der zu den Bestandteilen des Steinkohleteers in Zigaretten gehört. In Gastronomiebetrieben, in denen geraucht wird, kann man unter Umständen bis zu $15\,\mathrm{mg/m^3}$ Benzpyren in der Luft messen. Der mittlere Wert liegt hierbei in der Regel bei $0{,}28$–$0{,}48\,\mathrm{mg/m^3}$. (Siehe hierzu auch [13].) Bei einem Experiment wird nun in vier Gaststätten der Benzyprengehalt pro $\mathrm{m^3}$ gemessen. Hierbei erhält man die vier exakten Werte $x_1 = 1{,}019\,\mathrm{mg/m^3}$, $x_2 = 1{,}008\,\mathrm{mg/m^3}$, $x_3 = 1{,}012\,\mathrm{mg/m^3}$ und $x_4 = 1{,}007\,\mathrm{mg/m^3}$. Mithilfe des Verschiebungssatzes für die Varianz wird nun die Varianz dieser exakten Werte berechnet, wobei bei jedem Zwischenergebnis auf drei Nachkommastellen bzw. auf vier signifikante Ziffern gerundet wird. Nun ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} x_i &= 1{,}019 + 1{,}008 + 1{,}012 + 1{,}007 = 4{,}046,\\
\sum_{i=1}^{4} x_i^2 &\approx 1{,}038 + 1{,}016 + 1{,}024 + 1{,}014 = 4{,}092,\\
\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 &= (1{,}019 + 1{,}008 + 1{,}012 + 1{,}007)^2 \approx 16{,}37
\end{aligned}$$

und

$$4 \cdot x_M^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 \approx 4{,}093.$$

Somit ergibt sich mit dem Verschiebungssatz für die Varianz, die ein positiver Wert ist, der negative Näherungswert

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\left(\left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) - 4x_M^2\right) &= \frac{1}{3}\left(\left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{3}\,(4{,}092 - 4{,}093)\\
&= -\frac{0{,}001}{3} \approx -0{,}0003.
\end{aligned}$$

Wenn man statt des Verschiebungssatzes die Definition der Stichprobenvarianz verwendet hätte, so erhält man mithilfe der nachfolgenden Rechnung einen positiven Näherungswert für das exakte Ergebnis:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_i - x_M)^2 = \frac{1}{3}\big(&(1{,}019 - 1{,}012)^2 + (1{,}008 - 1{,}012)^2 \\ &+ (1{,}012 - 1{,}012)^2 + (1{,}007 - 1{,}012)^2\big) \\ \approx{}& 0{,}00003.\end{aligned}$$

D. h., die unterschiedlichen Vorgehensweisen liefern unterschiedliche Ergebnisse, und es hängt vom Problem ab, welches die güstigere Vorgehensweise ist.

Anmerkung 2.6 Bei der Herleitung bzw. beim Beweis des Verschiebungssatzes für die Stichprobenvarianz haben wir gesehen, dass sich der in der Definiton der Stichprobenvarianz gegebene Ausdruck

$$\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_M)^2$$

durch die bloße Anwendung mathematisch korrekter Rechenregeln in den durch den Verschiebungssatz gegebenen Ausdruck

$$\frac{1}{N-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - N \cdot x_M^2\right)$$

überführen lässt. Das vorangegangene Beispiel hat uns jedoch gezeigt, dass beide mathematisch äquivalenten Ausdrücke bei der konkreten Anwendung mit eventuell gerundeten (also mit Fehlern behafteten) Werten (z. B. aufgrund von vorgegebenen Rechengenauigkeiten) zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann. Hieraus ergibt sich somit das Fazit, dass es mitunter probleminduziert ist, welcher der angewendeten Rechenwege für eine konkrete Situation geeigneter bzw. anzuwenden ist. Die Anwendung eines für ein explizites Problem unter Umständen ungeeigneten Lösungswegs kann somit zu offenbar unsinnigen Ergebnissen führen, während andererseits ein mathematisch betrachtet äquivalenter Lösungsansatz, bei dem die Rechenschritte z. B. in einer anderen Reihenfolge stattfinden, zu einer geeigneten Antwort führt.

Aber nicht nur bei der Subtraktion pflanzen sich Fehler fort und können sich unter Umständen noch weiter verstärken. Dies gilt auch für die übrigen arithmetischen Rechenoperationen wie der Addition, der Multiplikation und der Division. Für $x \neq 0$, $y \neq 0$ mit $x \pm y \neq 0$ erhält man für die arithmetischen Rechenoperationen die nachfolgenden *Fehlerfortpflanzungen*:

1. Für die Addition und Subtraktion:
$$\begin{aligned}\frac{AbsF(x_F \pm y_F)}{x \pm y} &= \frac{AbsF(x_F) \pm AbsF(y_F)}{x \pm y}\\ &= \frac{(x_F - x) \pm (y_F - y)}{x \pm y}\\ &= \frac{x}{x \pm y}\left(\frac{AbsF(x_F)}{x}\right) \pm \frac{y}{x \pm y}\left(\frac{AbsF(y_F)}{y}\right).\end{aligned}$$
2. Für die Multiplikation:
$$\begin{aligned}\frac{AbsF(x_F \cdot y_F)}{x \cdot y} &= \frac{x_F \cdot y_F - x \cdot y}{x \cdot y}\\ &= \frac{(AbsF(x_F) + x) \cdot (AbsF(y_F) + y) - x \cdot y}{x \cdot y}\\ &= \frac{AbsF(x_F)}{x} + \frac{AbsF(y_F)}{y} + \frac{AbsF(x_F)}{x} \cdot \frac{AbsF(y_f)}{y}\\ &\doteq \frac{AbsF(x_F)}{x} + \frac{AbsF(y_F)}{y}.\end{aligned}$$
Hierbei bedeutet das Symbol $\doteq$, dass das Produkt (bzw. generell Produkte) von Fehlern vernachlässigt wird (werden). Dies ist ein Standardvorgehen, um komplizierte Fehlerausdrücke möglichst weit vereinfachen zu können.
3. Für die Division:
$$\begin{aligned}\frac{AbsF\left(x_F/y_F\right)}{x/y} &= \frac{x_F/y_F - x/y}{x/y}\\ &= \frac{\frac{x_F \cdot y - y_F \cdot x}{y_F \cdot y}}{x/y}\\ &= \frac{x_F \cdot y - y_F \cdot x}{y_F \cdot x}\\ &= \frac{AbsF(x_F) \cdot y - AbsF(y_F) \cdot x}{y \cdot x + AbsF(y_F) \cdot x}\\ &= \frac{AbsF(x_F) \cdot y - AbsF(y_F) \cdot x}{y \cdot x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{AbsF(y_F)}{y}}\\ &= \frac{AbsF(x_F) \cdot y - AbsF(y_F) \cdot x}{y \cdot x} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{AbsF(y_F)}{y}\right)^k\right)\\ &= \frac{AbsF(x_F) \cdot y - AbsF(y_F) \cdot x}{y \cdot x} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{AbsF(y_F)}{y}\right)^k\right)\\ &\doteq \frac{AbsF(x_F)}{x} - \frac{AbsF(y_F)}{y}.\end{aligned}$$

Hierbei haben wir $|AbsF(y_F)/y| < 1$ angenommen, so dass wir den Ausdruck $1/\left(1 + \frac{AbsF(y_F)}{y}\right)$ mithilfe der geometrischen Reihe (siehe Anmerkung 2.5) ersetzen konnten.

Zur Fehlerrechnung generell und auch noch weit ausführlicher siehe z. B. [14, Kapitel 1.2 „Fehlerquellen", Seiten 7–15], [16, Kapitel 1.2 bis 1.4, Seiten 4–19] und [18, Seiten 17 ff.]. Auf die Fehlerrechnung kehren wir auch noch einmal in Kap. 17 erneut zurück. Eine weitere Vertiefung dieses Themas an dieser Stelle ist nicht sinnvoll, da uns zum jetzigen Zeitpunkt noch einige Kenntnisse fehlen, die wir jedoch für eine noch weitere und detailliertere Behandlung der Fehlerfortpflanzung/Fehlerrechnung benötigen.

Übungsaufgaben

2.1 Berechnen Sie folgende Ausdrücke und schreiben Sie das Ergebnis als Bruch. Kürzen Sie, wenn dies möglich ist.

(a) $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{3} + \frac{5}{3}$ (c) $\frac{2}{3} \big/ \frac{3}{6}$ (d) $\frac{4^2}{2} \cdot \frac{1}{4}$

(e) $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}}$ (f) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{3}\right)$ (g) $\frac{3+\frac{1}{2}}{4-\frac{1}{3}}$

2.2 Rechnen Sie folgende Terme aus.

(a) $(a + b + c)^2$ (b) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
(c) $(a + b)^2(a - b)$ (d) $(a + b)^3$

2.3
1. Schreiben Sie $8^{1/2}$, $2^{3/4}$, $x^{-1/4}$ als Wurzel.
2. Berechnen Sie $\sqrt{(a - b)^2}$ für $b > a$.

2.4
1. Die beiden unterschiedlichen Seiten eines Rechtecks werden je um 30 % vergrößert. Um wie viel Prozent vergrößert sich dann der Flächeninhalt des Rechtecks?
2. Die drei unterschiedlichen Seitenflächen eines Quaders werden je um 40 % vergrößert. Um wie viel Prozent vergrößern sich damit die Oberfläche und das Volumen des Quaders?

2.5 Zeigen Sie mithilfe einer vollständigen Induktion über n, dass die sogenannten Fibonacci-Zahlen, die durch die Rekursionsformel $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$ mit $F(1) = F(2) = 1$ definiert sind, die Gleichung

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

erfüllen.

2.6 Beweisen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion die nachfolgenden Aussagen:

1. Für $n \geq 4$ gilt: $2^n < n!$.
2. Für $n \neq 3$ gilt: $n^2 \leq 2^n$.

2.7 Zeigen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ die Ungleichung

$$(1+x)^n > \frac{n^2}{4} x^2$$

erfüllt ist.

2.8 Beweisen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion die nachfolgende Aussage. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}. \tag{2.16}$$

(2.16) wird auch Gauß'sche Summe oder Gauß'sche Summenformel genannt.

2.9

1. Sechs Kühe fressen an einem Tag 200 kg Gras. Wie viel kg Gras fressen vier Kühe in sieben Stunden?
2. In drei Stunden legt ein Fahrzeug bei konstanter Geschwindigkeit 210 km zurück, wie weit kommt es in 7,5 Stunden?
3. Die Organisationsabteilung einer Bücherei plant für die Umgestaltung der Verkaufsräume eine Zeit von 42 Arbeitstagen ein. Dazu sind 17 Arbeitskräfte erforderlich, die acht Stunden/Tag arbeiten. Nach zehn Arbeitstagen erkranken vier Arbeitskräfte. Ihre Arbeitsunfähigkeit erstreckt sich über einen Zeitraum von sieben Arbeitstagen. Ermitteln Sie, wie viel Überstunden während der Krankheitszeit der vier Arbeitskräfte je Mitarbeiter und Arbeitstag vorgesehen werden müssen, wenn der geplante Termin eingehalten werden soll.
4. Eine Person zahlt für drei gleich teure Bücher 18 Euro. Wie viel Euro kosten dann acht dieser gleich teuren Bücher?

Literatur

1. Becker, M.: http://www.ijon.de/mathe/fibonacci/node9.html (2008). Zugegriffen: 26. Mai 2015
2. Breuer, H.: dtv-Atlas zur Physik. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, München (1987)
3. Cann, A. J.: Mathe für Biologen. Wiley-Vch, Weinheim (2004)
4. Hafner, L. und Hoff, P.: Genetik. Neubearbeitung. Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover (1988)
5. Hutchison, A. L. und Hutchison, R. L.: Fibonacci, Littler, and the Hand: A Brief Review Hand (N.Y.) **5**(4), 364–368 (2010)
6. Jacobs, K.: Resultate: Ideen und Entwicklungen in der Mathematik. Band 1 Proben mathematischen Denkens. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden (1987)
7. Jean, R. V.: Phyllotaxis: Plant Morphogenes: A Systemic Study in Plant Morphogenesis. Cambridge University Press, Cambridge (1994)
8. Kull, U. und Knodel, H.: Genetik und Molekularbiologie. 2. Aufl., J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung und Carl Ernst Poeschel Verlag GmbH, Stuttgart (1980)
9. Nultsch, W.: Allgemeine Botanik. 9. neubearb. Aufl., Georg Thieme Verlag, Stuttgart, New York (1991)
10. Ortlieb, C. P., von Dresky, C., Gasser, I. und Günzel, S.: Mathematische Modellierung: eine Einführung in zwölf Fallstudien. Springer, Heidelberg (2013)
11. Park, A. E., Fernandez, J. J., Schmedders, K., Cohen, M. S.: The Fibonacci Sequence: Relationship to the Human Hand. Journal of Hand Surgery **28**(1), 157–160 (2003)
12. Pschyrembel Klinisches Wörterbuch. 259. neubearb. Aufl., Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin (2002)
13. RauchStoppZentrum Zürich: http://www.rauchstoppzentrum.ch/0189fc92f11229701/0189fc93040dae802 (2015). Zugegriffen: 26. Mai 2015
14. Schaback, R. und Werner, H.: Numerische Mathematik. 4. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1992)
15. Singh, S.: Fermats letzter Satz. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, München (2000)
16. Stoer, J.: Numerische Mathematik 1. 5. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1989)
17. Tallack, P. (Hrsg.): Meilensteine der Wissenschaft. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin (2002)
18. Timischl, W.: Biomathematik. 2. Aufl., Springer, Wien, New York (1995)
19. Wolf, K.: Genetik. 2. überarb. Aufl., Westermann Schulbuchverlag GmbH, Braunschweig (1984)

http://www.springer.com/978-3-662-48500-2

Mathematik für Biologen
Horstmann, D.
2016, XVII, 394 S. 100 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-48500-2